۱-۱- کامپیوتر و سیستم های دیجیتالی

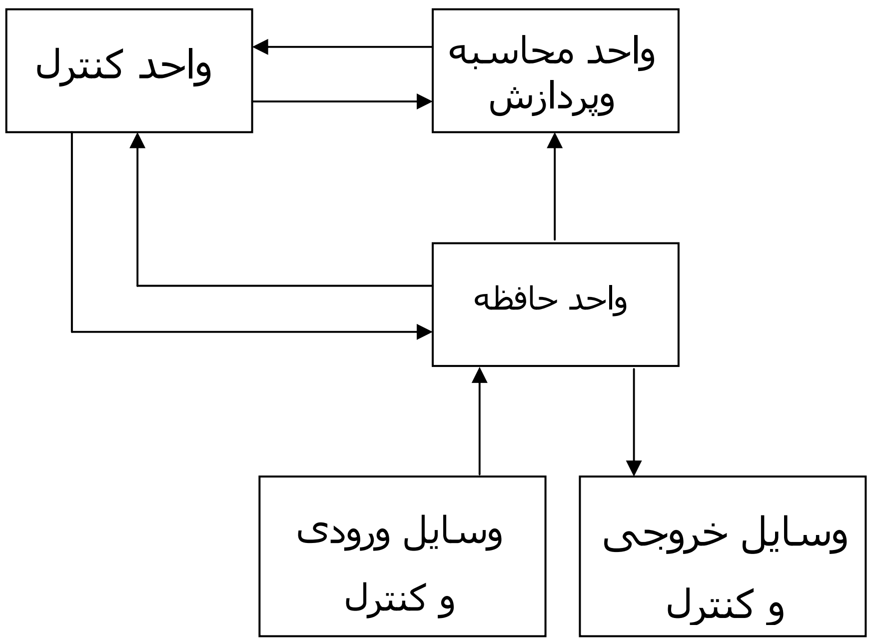
کامپیوتر های دیجیتال بسیاری از ، پیشرفت های علمی ، صنعتی و تجاری را که به صورت دیگر قابل دسترس نبودند ممکن ساخته اند . کامپیوتر ها در محاسبات علمی ، پردازش داده های تجاری ، کنترل ترافیک هوایی ، هدایت فضایی ، زمینه های فرهنگی و موارد بسیار دیگری مورد استفاده قرار گفته اند . کامپیوتر می تواند از مجموعه ای دستورالعمل های بنام برنامه که روی داده های مفروض عمل می کنند تبعیت نماید . استفاده کننده قادر است تغییرات گوناگونی را در برنامه ، داده ها و یا هر دوی آنها ، بر حسب نیاز ایجاد کند . به دلیل این انعطاف پذیری می توان نتیجه گرفت که کامپبوتر دیجیتال همه منظوره قادر هستند وظایف پردازش اطلاعات را در یک محدوده وسیع و متنوع به انجام برساند .

یک کامپیوتر دیجیتال همه منظوره ، شناخته شده ترین نمونه از یک دستگاه دیجیتال است . مشخصه یک سیستم دیجیتال ، توانایی اش در دستکاری اجزای گسسته اطلاعاتی است . کامپیوتر های دیجیتال اولیه بیشتر برای محاسبات عددی مورد استفاده قرار می گرفتند . در این حالت اجراء گسسته ، ارقام هستند . عبارت کامپیوتر دیجیتال هم از همین کاربرد ناشی شده است . سیستم پردازش اطلاعات گسسته می تواند نام مناسبتری برای یک کامپیوتر دیجیتال باشد .

اجزاء گسسته اطلاعات در یک سیستم دیجیتال را کمیت هایی فیزیکی به نام سیگنال می سازند ، که سیگنالهای الکتریکی مثل ولتاژ و جریان های معمول ترین هستند . سیگنال ها در تمام سیستمهای دیجیتال الکترونیکی امروز ، تنها دو مقدار مجزا داشته و دودویی نامیده می شوند. به دلیل قابلیت اعتماد کمی که مدارهای

الکترونیکی چند مقداره دارا هستند ، طراح یک سیستم دیجیتال به استفاده از سیگنالهای دودویی مقید است . به عبارت دیگر می توان با استفاده از ده ولتاژ مختلف یک مدار ده حالته را طراحی کرد اما این مدار از لحاظ عملیاتی دارای قابلیت اعتماد کمی می باشد . بر عکس ، یک مدار ترانزیستوری خاموش یا روشن دارای دو مقدار سیگنال بوده و می تواند با قابلیت اعتماد زیادی ساخته شود .

بلوک دیاگرام کامپیوتر دیجیتال در شکل (۱-۱) نشان داده شده است . واحد حافظه ، برنامه ها ، داده های ورودی ، خروجی و داده های واسطه را ذخیره می کند . واحد پردازشگر یا پردازنده وظیفه اجرای عملیات ریاضی و دیگر وظایف پردازش داده های را آنطوری که در برنامه مشخص شده است بعهده دارد . واحد کنترل بر جریان اطلاعات بین قسمت های گوناگون نظارت می کند . این واحددستورات را یک به یک از برنامه ای که در حافظه ذخیره شده است بازیابی کرده و برای هر دستورالعمل ، پردازنده را مطلع می نماید تا عملیات مشخص شده در آن دستور را اجرا کند .



شکل (۱-۱) بلوک دیاگرام یک کامپیوتر دیجیتال

برنامه ها و داده هایی که توسط استفاده کننده تهیه شده اند بوسیله یک دستگاه ورودی مثل صفحه کلیدبه واحد حافظه منتقل می گردند . یک دستگاه خروجی مثل چاپگر نتایج محاسبات را دریافت کرده و نتایج چاپ شده را در اختیار استفاده کننده قرار می دهد . دستگاههای ورودی و خروجی ، سیستم های دیجیتال بخصوصی هستند که با قسمت های الکترو مکانیکی راه اندازی شده و بوسیله مدارهای الکترونیکی دیجیتال کنترل می شوند.

همانطوری که قبلاً اشاره شد کامپیوتر های دیجیتال روی اجزای گسسته اطلاعات عمل می کنند و این اطلاعات به شکل دودویی نمایش داده می شوند . عملوندهای مورد استفاده در محاسبات ممکن است در دستگاه اعداد دودویی بیان شوند . اجزای گسسته دیگر مثل ارقام دهدهی به کدهای دودویی نمایش داده می شوند . پردازش داده ها با استفاده از اجزای منطقی دودویی که از سیگنالهای دودویی استفاده می کنند انجام می شود و مقادیر در المان های حافظه دودویی ذخیره می شوند .

٢-١- اعداد دودودیی

یک عدد در مبنای ده مثل ٧٣٩٢ مقداری معادل ٧ هزارتایی و به اضافه ٣ صدتایی به اشافه ٩ ده تایی به اضافه ٢ یکی را نشان می دهد . هزارگان ، صدگان و غیره توانهایی از ده هستند که دلالت بر مکان ضرایب می کنند . به منظور دقت بیشتر عدد ٧٣٩٢ بهتر است به صورت زیر نوشته شود :

$$7\times10^3+3\times10^2+9\times10^1+2\times10^0$$

بهر حال قرار داد این است که فقط ضرایب را بنویسیم و با توجه به مکان آنها توانهای ده را استنتاج نماییم . بطور کلی یک عد با نقطه اعشار در مبنای ده بوسیله ضرایب به صورت زیر نمایش داده می شوند :

$$a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} a_{-3}$$

که ضریب a_j یکی ارقام 0 تا ۹ بوده و مقدار اندیس j ارزش مکانی آن رقم ولذا توان دهی که ضریب بایستی در آن ضرب شود را می دهد .

$$10^5 a_5 + 10^4 a_4 + 10^3 a_3 + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + 10^0 a_0 + 10^{-1} a_{-1} + 10^{-2} a_{-2} + 10^{-3} a_{-3}$$

بنا به تعریف گفته می شود که سیستم اعداد اعشاری از مبنا یا پایه ۱۰ می باشد چرا که ده رقم در آن استفاده می شود و ضرایب نیز در توانهایی از ده ضرب می گردند ، دستگاه دودویی سیستم دیگری از اعداد است . ضرایب دستگاه اعداد دودیی دارای دو ارزش ممکن می باشند : ۰ و ۱ هر ضریب a_j ضریب در 2^j می شود .

برای مثال معادل مبنای ده عدد دودویی ۱۱۰۱۰,۱۱ همانطور که در زیر نشان داده شده ریال عدد ۲۶,۷۵ از ضریب توانایی از ۲ در ضرایب بدست می آید .

$$1\times2^4 + 1\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0 + 1\times2^{-1} + 1\times2^{-2} = 26.75$$

بطور کلی یک عدد در مبنای r به صورت حاصلضرب توانهای r در ضرایب مربوطه اش بیان می شود .

$$a_n . r^n + a_{n-1} . r^{n-1} + ... a_2 . r^2 + a_1 . r + a_0 + a_{-1} . r^{-1} + a_{-2} . r^{-2} + a_{-m} . r^{-m}$$

که ضرایب a_j . بین ۰ تا ۱- هستند .

در مبنای r کمتر از ۱۰ می باشد ، مرسوم است که r رقم مورد نیاز برای یک عدد از دستگاه دهدهی گرفته می شود .وقتی مبنای عدد بزرگتر از ده است از حروف الفبا برای تکمیل ارقام دهدهی استفاده می گردد . در مبنای شانزده ، ده رقم اول از سیستم دهدهی گرفته شده و حروف F,E,D,C,B,A به ترتیب به جای اعداد

(۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵) بکار می روند . مثالی از یک عدد در مبنای شانزده بصورت زیر است ،

$$(B65F)_{10} = 11\times16^3+6\times16^2+5\times16+15=(46687)_{10}$$

شانزده عدد اول دستگاه اعداد شانزده تایی ، هشت تایی ، دودویی و دهدهی در جدول (۱-۱) آمده است .

جدول (۱-۱) اعداد با مبناهای متفاوت

شانزده تایی (پایه ۱۶)	هشتایی (پایه ۸)	دودویی (پایه ۲)	دهدهی (پایه ۱۰)
۰	۰۰	۰۰۰۰	۰۰
۱	۰۱	۰۰۰۱	۰۱
۲	۰۲	۰۰۱۰	۰۲
۳	۰۳	۰۰۱۱	۰۳
۴	۰۴	۰۱۰۰	۰۴
۵	۰۵	۰۱۰۱	۰۵
۶	۰۶	۰۱۱۰	۰۶
۷	۰۷	۰۱۱۱	۰۷
۸	۱۰	۱۰۰۰	۰۸
۹	۱۱	۱۰۰۱	۰۹
A	۱۲	۱۰۱۰	۱۰
B	۱۳	۱۰۱۱	۱۱
C	۱۴	۱۱۰۰	۱۲
D	۱۵	۱۱۰۱	۱۳
E	۱۶	۱۱۱۰	۱۴
F	۱۷	۱۱۱۱	۱۵

اعمال ریاضی با مبنای r از همان قواعدی که برای اعداد دهدهی حاکم است پیروی می کند . وقتی از مبنای غیر از ۱۰ استفاده می شود می بایست دقت کرد تا فقط r رقم مجاز آن مبنا مورد استفاده قرار گیرد .مثالهای از جمع ، تفریق و ضرب دو عدد دودویی در زیر نشان داده شده است :

۱۰۱۱	مضروب	۱۰۱۱۰۱	مفروق	۱۰۱۱۰۱	مضاف
۱۰۱*	مضروب فیه	۱۰۰۱۱۱-	مفروق منه	۱۰۰۱۱۱+	مضاف الیه
۱۰۱۱		۰۰۰۱۱۰	باقیمانده	۱۰۱۰۱۰۰	حاصل جمع
۰۰۰۰					
۱۰۱۱					
۱۱۰۱۱۱	حاصل ضرب				

مجموع دو عدد دودویی طبق همان قوانین دستگاه دهدهی محاسبه می شود ، بجز اینکه ارقام با ارزش حاصل جمع در تمام مکان های با معنی فقط می تواند ۰ یا ۱ باشند . هر رقم نقلی بدست آمده در مکانی مفروض بوسیله جفت رقم های مرتبه بالاتر مورد استفاده قرار می گیرد . عمل تفریق کمی پیچیده تر است . قوانین باز هم همان قانونهای دهدهی هستند ، بجز اینکه رقم قرضی با ارزش مکانی داده شده ۲ واحد به رقم مفروق اضافه می کند . (یک رقم قرضی از دستگاه دهدهی ، ۱۰ واحد به رقم مفروق اضافه می کند) عمل ضرب بسیار ساده است . ارقام مضروب فیه همیشه ۱ یا ۰ هستند . بنابراین حاصل ضرب های جزئی یا ۰ و یا مساوری مضروب می باشند .

۳-۱- تبدیل مبنای اعداد

یک عدد دودویی به وسیله جمع کردن توانهایی از ۲ که مقدار ضرایبشان یک است به صورت دهدهی آن تبدیل می شود . برای مثال :

$$(1010.011)_2 = 2^3 + 2^1 + 2^{-2} + 2^{-3} = (10.375)_{10}$$

در زیر مثالی از تبدیل مبنای هشت به ده آمده است :

$$(630.4)_3 = 6\times8^2+3\times8+4\times8^{-1} = (408.5)_{10}$$

در تبدیل مبنای ده به دو یا به هر مبنای دیگر راحت تر است که قسمت صحیح و قسمت اعشاری عدد را جدا کرده و هر کدام را به طور جداگانه تبدیل کنیم .

مثال ۱-۱- عدد ۴۱ را به دودویی تبدیل کنید .

ابتدا ۴۱ بر حسب ۲ تقسیم شده تا خارج قسمت ۲۰ و باقیمانده ۱/۲ بدست آید . خارج قسمت مجدداً تقسیم شده تا خارج قسمت و باقیمانده جدیدی حاصل گردد . این روال به همین صورت تا زمانی ادامه می یابد که خارج قسمت صحیح به دست آمده صفر شود . ضرایب عدد دودویی مطلوب به صورت زیر از باقیمانده ها بدست می آیند .

خارج قسمت صحیح		باقیمانده	ضریب عدد دودویی
$\frac{41}{2}=20$	+	$\frac{1}{2}$	$a_0=1$
$\frac{20}{2}=10$	+	٠	$a_1=0$
$\frac{10}{2}=5$	+	٠	$a_2=0$
$\frac{5}{2}=2$	+	$\frac{1}{2}$	$a_3=1$
$\frac{2}{2}=1$	+	٠	$a_4=0$
$\frac{1}{2}=0$	+	$\frac{1}{2}$	$a_5=1$

جواب : $(41)_{10}=(a_5a_4a_3a_2a_1a_0)_2=(101001)_2$

روال ریاضی فوق می تواند بصورت مناسبتری بصورت زیر عمل شود :

خارج قسمت صحیح	باقیمانده
۴۱	
۲۰	۱
۱۰	۰
۵	۰
۲	۱
۱	۰
۰	۱

جواب = ۱۰۱۰۰۱

تبدیل اعداد صحیح دهدهی به مبنای r شبیه به مثال مذکور است بجز اینکه تقسیم می بایست به جای ۲ بر r صورت گیرد .

مثال : ۲-۱- : عدد ۱۵۳ را به مبنای هشت ببرید.

۱۵۳	
۱۹	۱
۲	۳
۰	۲

$= (231)_8$

مثال : ۳-۱- عدد $(0.6875)_{10}$ را به مبنای دو ببرید .

	صحیح		کسری	ضرب
$0.6875\times 2=$	۱	+	۰,۳۷۵۰	$a_{-1}=1$
$0.3750\times 2=$	۰	+	۰,۷۵۰۰	$a_{-2}=0$
$0.7500\times 2=$	۱	+	۰,۵۰۰۰	$a_{-3}=1$
$0.5000\times 2=$	۱	+	۰,۰۰۰۰	$a_{-4}=1$

جواب : $(0.6875)_{10}=(0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}a_{-4})_2=(0.1011_2$

برای تبدیل یک عدد کسری از مبنای ده به یک عدد در پایه r ، روش مشابهی انجام می شود .

فقط به جای ضرب در ۲ ، ضرب در r انجام می گردد و ضرایب حاصل از قسمتهای صحیح می توانند به جای ۰ و ۱ در محدوده بین ۰ تا r-۱ باشند .

مثال : ۱-۴ : عدد $(0.513)_{10}$ را به مبنای هشت ببرید .

$$\begin{aligned} 0.413\times8&=4.104\\ 0.104\times8&=0.832\\ 0.832\times8&=6.656\\ 0.656\times8&=5.248\\ 0.248\times8&=1.984\\ 0.984\times8&=7.872 \end{aligned}$$

جواب تا هفت رقم با معنی ، از قسمتهای صحیح حاصل ضرب ها بدست می آید .

$$(0.513)_{10}=(0.406517...)_8$$

تبدیل اعداد دهدهی که دارای هر دو قسمت صحیح و کسری هستند به این صورت انجام میگیرد که هر قسمت بطور مجزا تبدیل شده سپس جوابها با هم ترکیب می شوند . با استفاده از نتایج مثال ۱-۱ و ۳-۱ داریم :

$$(41.6875)_{10}=(101001.1011)_2$$

از مثالهای ۲-۱ و ۴-۱ نیز داریم :

$$(153.513)_{10}=(231.406517)_8$$

۱-۴ اعداد مبنای هشت و شانزده

تبدیل از مبنای دو به مبنای هشت و شانزده و بالعکس نقش مهمی در کامپیوترهای دیجیتال دارد . چون $2^3=8$ و $2^4=16$ است ، هر رقم در مبنای هشت مطابق سه رقم دودویی و هر رقم بر مبنای شانزده ، چهار رقم دودویی است . تبدیل مبنای دو به هشت به سادگی با تقسیم عدد دودویی به دسته های سه تایی از نقطه اعشاری

دودویی به سمت چپ و راست صورت می گیرد و به هر دسته از این اعداد یک رقم در مبنای هشت نسبت داده می شود . مثال زیر نشان دهنده روند مربوطه است :

$$(\frac{10}{2}\frac{110}{6}\frac{001}{1}\frac{101}{5}\frac{011}{3}.\frac{111}{7}\frac{100}{4}\frac{000}{0}\frac{110}{6})_2=(26153.7406)_8$$

تبدیل از مبنای دو به مبنای شانزده نیز مشابه با روند بالا است ، با این تفاوت که عدد دودویی به دسته های چهارتایی از ارقام تقسیم بندی می شوند.

$$(\frac{10}{2}\frac{1100}{C}\frac{0110}{6}\frac{1011}{B}\ \ \frac{1111}{F}\frac{0010}{2})_2=(2C6B.F2)_{16}$$

هر عدد در مبنای شانزده (هشت ۹ متناسب با هر دسته از ارقام دودویی ، بعد از مطالعه مقادیر ثبت شده در جدول (۱-۱) به سادگی تعیین می شود .

تبدیل از مبنای هشت یا شانزده به مبنای دو با روشی عکس روش بالا صورت می گیرد . هر رقم در مبنای شانزده به چهار رقم معادل در مبنای دو تبدیل می شود . بطور مشابه هر رقم در مبنای شانزده به معادل دودویی چهار رقمی خود تبدیل می گردد . این مطلب در مثال زیر تشریح شده است :

$$(673.124)_8=(\frac{110}{6}\frac{111}{7}\frac{011}{3}\ \ \frac{001}{1}\frac{010}{2}\frac{100}{4})_2$$
$$(306.D)_{16}=(\frac{0011}{3}\frac{0000}{0}\frac{0110}{6}.\frac{1101}{D})_2$$

کارکردن با اعداد دودویی به دلیل اینکه تعداد ارقامشان سه یا چهار برابر عدد معادلشان در مبنای ده می باشد مشکل است . (مثلاً عدد دودویی ۱۱۱۱ ۱۱۱۱ ۱۱۱۱ معادل عدد دهدهی ۴۰۹۵ است . با این وجود کامپیوترهای دیجیتال از اعداد دودویی استفاده می کنند و گاهی نیز لازم است که اپراتور و یا استفاده کننده مستقیماً به وسیله اعداد دودویی با ماشین ارتباط برقرار کند . یک راه برای نگهداری سیستم دودویی در کامپیوتر که ضمناً تعداد ارقام را نیز کاهش می دهد ، این است

که از ارتباط بین سیستم اعداد دودویی و سیستم هشت تایی یا شانزده استفاده شود . با این روش انسان می تواند بر حسب اعداد مبنای شانزده یا هشت تایی فکر کرده و در مواقعی که ارتباط مستقیم با ماشین لازم است تبدیل لازمه را با بازدید کردن این اعداد انجام دهد . به این ترتیب عدد دودویی ۱۱۱۱ ۱۱۱۱ ۱۱۱۱ که دارای دوازده رقمن است در مبنای هشت به صورت چهار رقم ۷۷۷۷ بیان می شود و یا در مبنای شانزده به صورت سه رقم FFF خواهد بود .در ارتباطات بین مردم (در مورد اعداد اردودویی در کامپیوتر) نمایش اعداد در مبناهای هشت و شانزده مطلوب تر است زیرا که در این مبناها اعداد به صورت کوچکتری با ۱/۳ یا ۱/۴ تعداد ارقام معادلشان در دودویی قابل نمایش هستند .

۵-۱- مکمل ها

مکمل ها در کامپیوترهای دیجیتال برای ساده کردن عمل تفریق و یا عملیات منطقی به کار می روند . در هر مبنای r دو نوع مکمل برای هر سیستم وجود دارد : یکی مکمل مبنا یا پایه و دیگری مکمل مبنا یا پایه کاهش یافته است . فرم اول به مکمل r و دومی به مکمل (۱- r) موسوم است . وقتی مقدار پایه را جایگزین کنیم ، برای اعداد دودویی مکمل های ۲ و ۱ برای اعداد مکمل های ۱۰ و ۹ را خواهیم داشت .

مکمل در پایه کاهش یافته

برای عددی مانندN در مبنا یا پایه r که دارای n رقم است ، مکمل (r-۱) مربوط به N بصورت $(r^n - 1) - N$ تعریف می شود . برای اعدادی با ۱۰ = r و ۹ =۱- r ، مکمل ۹ برای عدد N برابر است با $(10^n - 1) - N$. عدد ۱۰^n برابرست با یک عدد ۱ که n عدد ۰ بدنیال آن آمده است . بهمین ترتیب ۱۰^n-۱ برابرست با n عدد ۹ . مثلاً اگر

n=۴ باشدداریم $10^4=10000$ و $10^4-1=9999$ دیده می شود که مکمل ۹ یک عدد دهدهی از تفریق هر رقم آن از ۹ حاصل می شود . به چند مثال عددی توجه کنید .

مکمل ۹ عدد ۵۴۶۷۰۰ برابرست با

۹۹۹۹۹۹-۵۴۶۷۰۰=۴۵۳۲۹۹

مکمل ۹ عدد ۰۱۲۳۹۸ برابرست با

۹۹۹۹۹۹-۰۱۲۳۹۸=۹۸۷۶۰۱

برای اعداد دودویی ، r=۲ و r-۱=۱ است ، لذا مکمل ۱ عدد n برابرست با

n –(۱- ۲^n) . مجدداً ۲^n از یک عدد دودویی متشکل از یک ۱ و تعدادی ۰ بدنبال آن است . ۱- ۲^n نیز بوسیله n عدد ۱ نشان داده می شود . مثلاً اگر n=۴ باشد داریم $2^4=(10000)_2$ و $2^4-1=1111$.

مکمل ۱ یک عدد دودویی از تبدیل ۱ها به ۰ها و به ۱ حاصل می شود .

مکمل ۱ عدد ۱۰۱۱۰۰۰ برابرست با ۰۱۰۰۱۱۱

مکمل ۱ عدد ۰۱۰۱۱۰۱ برابرست با ۱۰۱۰۰۱۰

مکمل (r-۱) اعداد مبنای هشت و شانزده به ترتیب از تفریق ارقام از ۷ یا F (معادل ۱۵ دهدهی) حاصل می شود .

مکمل پایه r

مکمل r یک عدد n رقمی مانند N در مبنای r بصورت r^n-N به ازای $N \neq 0$ و بصورت ۰ به ازای N=۰ تعریف می شود . با مقایسه این نوع مکمل با مکمل (r-۱) ملاحظه می شود که مکمل r از جمع ۱ با مکمل (r-۱) حاصل می شود . زیرا $r^n-N=[(r^n-1)-N]+1$ است . بنابراین مکمل ۱۰ یک عدد دهدهی مانند ۲۳۸۹ برابراست با ۷۶۱۱=۷۶۱۰+۱ و با افزودن ۱ به مقدار مکمل ۹ حاصل گردیده است .

مکمل عدد دودویی ۱۰۱۱۰۰ برابر است با ۰۱۰۱۰۰=۱+۰۱۰۰۱۱ و از جمع ۱ با مکمل ۱ عد حاصل شده است .

چون 10^n عددی است که با یک ۱ و n عدد ۰ بدنبال آن ساخته شده است ، مکمل عدد N یعنی $10^n - N$ نیز با تغییر ندادن ۰ های کم ارزشتر و کسر اولین رقم غیر صفر از ۱۰ و تفریق تمام ارقام با ارزشتر از ۹ حاصل می شود .

مکمل ۱۰ عدد ۰۱۲۳۹۸ برابرست با ۹۸۷۶۰۲

مکمل ۱۰ عدد ۲۴۶۷۰۰ برابرست با ۷۵۳۳۰۰

مکمل ۱۰ اولین عدد از تفریق ۸ از ۱۰ در کم ارزش ترین مکان و تفریق بقیه ارقام از ۹ حاصل شده است . مکمل ۱۰ دومین عد بدین فرم حاصل شده که دو عدد ۰ با ارزش کمتر بدون تغییر مانده درحالیکه ۷ از ۱۰ و سه رقم دیگر از ۹ کسر شده است .

بطور مشابه مکمل ۲ دمی تواند با بدوت تغییر گذاردن ۰ های کم ارزش تر و اولین ۱ پس از آنهاو جایگزینی ۱ها یا ۰ ها با ۱ در سایر ستون های ارقام با ارزشتر بدست آید .

مکمل ۲ عدد ۱۱۰۱۱۰۰برابرست با ۰۰۱۰۱۰۰

مکمل ۲ عدد ۰۱۱۰۱۱۱برابرست با ۱۰۰۱۰۰۱

مکمل ۲ اولین عدد با بدون تغییر گذاشتن دو ۰ با ارزش کمتر و نیز اولین ۱ پس از آنها و سپس جایگزینی ۱ ها با ۰ و ۰ ها با ۱ در چهار ستون باقیمانده حاصل شده است . دومین مکمل ۲ با تغییر ندادن کم ارزش تری ۱ و مکمل نمودن بقیه ارقام بدست آمده است .

اگر عدد اولیه N دارای ممیز باشد باید آن را موقتا حذف و مکمل های r و (r-۱) را بدست آورد . سپس آن را به همان مکانی نسبی عدد مکمل بازگرداند . همچنین ذکر

این نکته که مکمل مربوط به مکمل یک عدد همان اولیه را نتیجه می دهد مفید بنظر می رسد . مکمل r عدد N برابرست با r^n - N مکمل مربوط به این مکمل برابرست با $r^n-(r^n-N)=N$ که همان عدد اولیه است .

تفریق به کمک مکمل ها

تفریق دو عدد n رقمی بدون علامت M-N در پایه r بطریق زیر صورت می گیرد .

١- مفروق M را به مکمل r مفروق منه N اضافه کنید یعنی

$$M+(r^n-N)=M-N-r^n$$

٢- اگر $M \geq N$ باشد ، جمع یک رقم نقلی نهایی r^n تولید می کند که چشم پوشی می شود ، آنچه باقی می ماند M-N است .

٣- اگر $M<N$ باشد ، جمع هیچگونه رقم نقلی نهایی تولید ننموده وجواب $r^n-(N-M)$ می باشد که مکمل r عدد (M-N) است . برای یافتن جواب بفرم معمول ، مکمل r حاصل جمع را بدست آورده و یک علامت منفی در جلو آن قرار می دهیم .

مثال ۵-١ : با استفاده از مکمل ١٠، ٣٢۵٠ – ٧٢۵٣٢ را بدست آورید .

M =	٧٢۵٣٢
= مکمل ١٠ عدد N	+٩۶٧۵٠
= حاصل جمع	١۶٩٢٨٢
= حذف رقم نقلی $١٠^۵$	-١٠٠٠٠٠
= جواب	۶٩٢٨٢

دقت کنید که M دارای پنج رقم ولی N فقط دارای چهار رقم است . چون هر دو عدد باید دارای تعداد ارقام برابر باشند ، پس باید بصورت ٠٣٢۵٠ نوشته می شود .

مثال ۶-۱ : با استفاده از مکمل ۱۰ ، ۳۲۵۰-۷۲۵۳۲ را بدست آورید .

M = ۰۳۲۵

مکمل ۱۰ عدد N = +۲۷۴۶۸

حاصل جمع = 30718

رقم نقلی وجود ندارد

جواب : -(مکمل ۱۰ عدد ۳۰۷۱۸) =-۶۹۲۸۲

توجه کنید چون ۷۲۵۳۲ < ۳۲۵۰ است ، جواب منفی است .

مثال ۷-۱ : با فرض دود عدد دودویی X=۱۰۱۰۱۰۰ و ۱۰۰۰۰۱۱ = Y ، تفریق های :

(الف) X-Y و (ب) Y-X را با استفاده از مکمل ۲ بدست آورید .

X = ۱۰۱۰۱۰۰

مکمل ۲ عدد Y = +۰۱۱۱۱۰۱

حاصل جمع = ۱۰۰۱۰۰۰۱

رقم نقلی حذف شده $۲^۷$ = -۱۰۰۰۰۰۰۰

جواب X-Y = ۰۰۱۰۰۰۱

Y = ۱۰۰۰۰۱۱

مکمل ۲ عدد X = +۰۱۰۱۱۰۰

حاصل جمع = ۱۱۰۱۱۱۱

رقم نقلی وجود ندارد

جواب : Y-X = -(مکمل ۲ عدد ۱۱۰۱۱۱۱) = -۰۰۱۰۰۰۱

تفریق اعداد بدون علامت می تواند با استفاده از مکمل (R-۱) نیز انجام شود . بخاطر بیاورید که مکمل (R-۱) یکی کمتر از مکمل r است . به این علت ، نتیجه جمع مفروق به مکمل مفروق منه حاصل جمعی تولید می کند که یکی کمتر از تفاضل صحیح بهنگام رخداد رقم نقلی نهایی است . حذف رقم نقلی نهایی و افزودن آن به حاصل جمع بنام رقم نقلی چرخشی خوانده می شود .

مثال ۸-۱ : مثال ۷-۱ را با استفاده از مکمل ۱ تکرار کنید .

(الف)

X-Y=۱۰۱۰۱۰۰-۱۰۰۰۰۱۱

X = ۱۰۱۰۱۰۰

مکمل ۱ عدد Y = + ۰۱۱۱۱۰۰

حاصل جمع = ۱۰۰۱۰۰۰۰

رقم نقلی چرخشی = ۱+

جواب : X-Y = ۰۰۱۰۰۰۱

(ب)

Y-X=۱۰۰۰۰۱۱-۱۰۱۰۱۰۰

Y = ۱۰۰۰۰۱۱

مکمل ۱ عدد X = + ۰۱۰۱۰۱۱

حاصل جمع = ۱۱۰۱۱۱۰

رقم نقلی وجود ندارد

جواب :Y-X =-(مکمل ۱ عدد ۱۱۰۱۱۱۰) = -۰۰۱۰۰۰۱

توجه کنید که نتیجه منفی پس از گرفتن مکمل ۱ از حاصل جمع بدست آمده است . زیرا مکمل ۱ در بالا بکار رفته است . روش رقم نقلی چرخشی برای تفریق اعداد دهدهی بدون علامت با مکمل ۹ نیز قابل استفاده است .

۱-۶ اعداد دودودیی علامت دار

بعلت محدودیت سخت افزار ، کامپیوتر ها باید هر چیزی را با ارقام دودیی نشان دهند ، که معمولاً این ارقام بیت نامیده می شوند . معمول است که سمت چپ ترین بیت عدد را به علامت اختصاص می دهند . قرار این است که اعداد مثبت را با گذاشتن ۰ و اعداد منفی را با گذاشتن ۱ در محل بیت مزبور نشان دهند .

مثلاً ، رشته بیت های ۰۱۰۰۱ می تواند بعنوان ۹ (دودویی بدون علامت) و یا ۹+ (دودویی علامت دار) در نظر گرفته شود زیرا سمت چپترین بیت ۰ است . رشته بیت های ۱۱۰۰۱ ، هرگاه بعنوان عدد بدون علامت در نظر گرفتنه شود برابر ۲۵ تو بهنگام علامت دار بودن برابر ۹ را نشان می دهد . مکان عدد رقم ۱ وجود دارد که بیانگر منفی بودن عدد و بقیه چهار بیت عدد ۹ را نشان می دهد . معمولاً اگر نوع عدد مشخص باشد هیچگونه اشتباهی در تشخیص وجود نخواهد داشت .

نمایش اعداد علامت دار در آخرین مثال فوق ، نمایش مقدار – علامت نامیده می شود . در ین نامگذاری عدد شامل مقدار و یک نماد (+ یا -) یا یک بیت (۰ یا ۱) برای مشخص نمودن علامت است . این روش مورد استفاده اعداد علامت دار در ریاضیات معمولی است . وقتی که اعمال ریاضی در یک کامپیوتر پیاده سازی می شوند ، بهتر است از روش دیگری بنام سیستم مکمل – علامت برای ارائه اعداد منفی استفاده شود . در این سیستم ، یک عدد منفی بوسیله مکمل آن مشخص می شود . در

حالیکه سیستم مقدار – علامت ، عد را با تغییر علامتش منفی می نماید ، سیستم مکمل – علامت با مکمل سازی ، منفی آن را تهیه می نماید . چون اعداد مثبت همواره با ۰ (مثبت) در سمت چپشان شروع می شوند ، مکمل آنها همیشه با ۱ آغاز خواهند شد ، این نشانگر عدد منفی است . سیستم مکمل – علامت می تواند از مکمل ۱ یا ۲ استفاده نماید . ولی مکمل ۲ مرسوم تر است .

بعنوان مثال ، فرض کنید عدد ۹ بصورت دودویی با هشت بیت نشان داده شده باشد . ۹+ بوسیله یک ۰ در سمت چپ ترین امکان از هشت بیت و بدنبال آن معادل دودویی ۹ ، نشان داده می شود و نتیجه ۰۰۰۰۱۰۰۱ خواهد بود . توجه داشته باشید که تمام هشت بیت باید مقدار داشته باشد ، بنابراین ۰ ها از محل علامت تا اولین ۱ از سمت چپ وارد شده اند . هر چند که فقط یک راه برای نمایش ۹+ وجود دارد ، برای نمایش ۹- با هشت بیت سه روش موجود است :

در نمایش مقدار – علامت ۱۰۰۰۱۰۰۱

در نمایش مکمل۱- علامت ۱۱۱۱۰۱۱۰

در نمایش مکمل۲- علامت ۱۱۱۱۰۱۱۱

در سیستم مقدار – علامت ، ۹- از ۹+ و با تغییر بیت علامت در سمت چپ ترین مکان از ۰ به ۱ حاصل می شود . در سیستم مکمل ۱- علامت ، ۹- را با مکمل کردن تمام بیت های ۹+ از جمله بیت علامت بدست می آوریم . در سیستم مکمل ۲- علامت ، ۹- را از مکمل ۲ عدد مثبت و از جمله بیت علامت بدست می آوریم .

سیستم مقدار – علامت در ریاضی معمولی بکار می رود ، ولی وقتی کامپیوتر بکار رود مشکلاتی به همراه دارد . بنابراین معمولاً درکامپیوتر روش مکمل – علامت بکار گرفته می شود . مکمل ۱ نیز مشکلاتی را ایجاد می نماید و بندرت برای اعمال

ریاضی، بجز در کامپیوتر های قدیمی استفاده می شود . مکمل ۱ برای اعمال منطقی مفید است چون تبدیل ۰ به ۱ و یا به ۱ به ۰ معادل با یک مکمل سازی منطقی است که در فصل بعدی نشان داده خواهد شد .. روش مشابهی به سیستم مکمل ۱- علامت قابل اعمال است و در ان رقم نقلی چرخشی ، همچون اعداد بدون علامت ، نیز منظور می شود .

جمع حسابی

جمع دو عدد در سیستم مقدار – علامت از قوانین معمولی ریاضی تبعیت می نماید . اگر علامتها یکسان باشند ، دو مقدار را به هم اضافه می کنیم تا مجموع با علامت مشترک را بدهد . اگر علامتها مختلف باشند ما مقدار کوچکتر را از بزرگتر کم می کنیم و علامت مقدار را بر می گزنیم مثلاً ،

$$(+25)+(-37)=-(37-25)=-12$$

و بدین ترتیب انجام شده که مقدار کوچکتر ۲۵ از ۳۷ کم شده و علامت ۳۷ بعنوان علامت جواب بکار رفته است . این روند به مقایسه علامتها و سپس اجرای جمع یا تفریق نیاز دارد . روش مشابهی به اعداد دودویی در فرم مقدار – علامت قابل اعمال است . برعکس ، قانون جمع در سیستم مکمل – علامت مقایسه یا تفریقی را احتیاج ندارد بلکه فقط جمع مورد نیاز است .

جمع دو عدد دودویی علامت دار با اعداد منفی که بفرم مکمل ۲ نشان داده شده اند از جمع دو عدد حاصل می شود که بیت علامتشان نیز منظور می گردد . رقم منفی در ابتدا بصورت مکمل ۲ می باشند و حاصل جمع اگر منفی باشد بصورت مکمل ۲ است .

۱۱۱۱۱۰۱۰	-۶	۰۰۰۰۰۱۱۰	+۶
۰۰۰۰۱۱۰۱	+۱۳	۰۰۰۰۱۱۰۱	
+۰۱۳			
۰۰۰۰۰۱۱۱	+۷	۰۰۰۱۰۰۱۱	+۱۹

۱۱۱۱۱۰۱۰	-۶	۰۰۰۰۰۱۱۰	+۶
۱۱۱۱۰۰۱۱	-۱۳	۱۱۱۱۰۰۱۱	-۱۳
۱۱۱۰۱۱۰۱	-۱۹	۱۱۱۱۱۰۰۱	-۷

برای یافتن یک جواب صحیح ، ما باید مطمئن باشیم که برای جا سازی حاصل جمع تعداد کافی بیت وجود دارد . اگر با دو عدد n بیت آغاز کنیم و جمع n+۱ بیت را اشغال کند گوییم سرریز رخ داده است . سرریز کامپیوتر یک مسئله است زیرا تعداد بیت هایی که عدد را نگه می دارند محدود است و اگر جواب به اندازه ۱ واحد از حداکثر مقدار قابل نگهداری در n بیت تجاوز کند قابل جای دهی نخواهد بود .

تفریق حسابی

تفریق دود عدد علامت دار ، وقتی که بصورت مکمل ۲ باشد بسیار ساده است و بصورت زیر بیان می گردد .

مکمل ۲ مفروق منه را بدست آورید (با بیت علامت) و آن را با مفروق (با بیت علامت) جمع کند . رقم نقلی از مکان بیت علامت حذف می گردد .

$$(\pm A)-(+B)=(\pm A)+(-B)$$
$$(\pm A)-(-B)=(\pm A)+(+B)$$

اما تبدیل یک عد مثبت به منفی به سادگی با یافتن مکمل ۲ آن امکان پذیر است . عکس مطلب نیز صحیح است زیرا مکمل یک عدد منفی بفرم مکمل ، یک عد مثبت

تولید می نماید . تفریق ۷+ = (۳-) – (۶-) را ملاحظه کنید . در دودویی با هشت بیت ، این تفریق بصورت ۱۱۱۱۰۰۱۱ – ۱۱۱۱۱۰۱۰ نوشته می شود و عمل تفریق با بدست آوردن مکمل ۲ مفروض منه (۱۳-) بصورت (۱۳+) در می آید . در دودویی برابرست با ۱۰۰۰۰۰۱۱۱ = ۰۰۰۰۱۱۰۱ – ۱۱۱۱۱۰۱۰ . با حذف رقم نقلی نهایی پاسخ صحیح ۰۰۰۰۰۱۱۱ که همان (۷+) است بدست می آید .

۱-۷ کدهای دودویی

یک عدد دودویی n رقمی را می توان با یک مدار که دارای n جزء دودویی است و هر کدام دارای یک سیگنال خروجی معادل ۰ و یا ۱ هستند ، نشان داد . سیستم های دیجیتال نه تنها اعداد دودویی بلکه بسیاری از اجزاء گسسته اطلاعاتی دیگر را نیز نمایش می دهند و روی آنها عمل می کنند . هر عنصر گسسته مستقل اطلاعاتی در میان یک گروه از مقادیر را می توان با استفاده از کد دودویی نشان داد . کدها باید بصورت دودویی باشند زیرا کامپیوتر ها قادر به نگهداری ۰ ها و ۱ ها می باشند .

یک بیت ، طبق تعریف یک رقم دودویی است . وقتی که به همراه یک کد بکار می رود بهتر است که آن را به یک کمیت دودویی برابر با ۰ یا ۱ ها تصور می کنیم . نمایش یک گروه از ۲^n عنصر به صورت کد ، به حداقل n بیت نیاز دارد ، زیرا n بیت را می توان به 2^n طریق مجزا در کنار هم قرار داد . به عنوان مثال هشت عنصر نیازمند یک کد سه بیتی است که هر جزء آن فقط و فقط به یکی از ترکیبات ۰۰۰ ، ۰۰۱ ، ۰۱۰ ، ۰۱۱ ، ۱۰۰ ، ۱۰۱ ، ۱۱۰ و ۱۱۱ نسبت داده می شود . مثالهای فوق نشان می دهند که ترکیبات یک کد n بیتی را می توان با شمارش دودویی از صفر تا (۲^n-۱) به دست آورد . وقتی که تعداد اجزای یک گروه اطلاعاتی دقیقاً معادل توانی از ۲ نباشد تعدادی از ترکیبات کدها را بلااستفاده باقی می گذاریم . ارقام ۰ ، ۱ ، ... ، ۹ در دستگاهی

دهدهی مثالی از چنین گروهی است . چهار بیت می تواند شانزده ترکیب مجزا را به وجود آورد اما از آنجایی که ده رقم را بیشتر نمی خواهیم کد گذاری کنیم شش ترکیب باقی مانده دیگر به کار گرفته نشده وبلا استفاده می ماند .

اگر چه برای کد کردن 2^n مقدار مشتمل ، مینیمم تعداد بیتها لازم n تاست . ولی مقدار ماکزیمم برای تعداد بیتهای مورد استفاده وجود ندارد . مثلاً ده رقم دهدهی را می توان با ده بیت به این صورت کد کرد که هر رقم دهدهی را به رقم دودویی نسبت بدهیم که ۹ تا صفر و یک ۱ دارد . در این کد گذاری ویپه رقم ۶ با این ترکیب بصورت ۰۰۰۱۰۰۰۰۰۰ نمایش داده می شود .

کدهای دهدهی

کدهای دودویی برای ارقام دهدهی حداقل چهار بیت لازم دارند . از کنار هم قرار دادن چهار بیت یا بیشتر در ده ترکیب مستقل ممکن ، کدهای متعددی می توان به دست اورد . در جدول (۲-۱) تعدادی از این حالات ممکن نشان داده شده است .

کد BCD کدی است که در آن از معادل دودویی اعداد در مبنای ده مستقیماً استفاده می شود . به بیتهای دودویی بر طبق مکانشان می توان وزن یا ارزشی نسبت داد . این روش در کد BCD ، ۱،۲،۴،۸ است . مثلاً کد ۰۱۱۰ برحسب ارزش بیتها نشان دهنده رقم ۶ دهدهی است : چون $0\times8+1\times4+1\times2+0\times1=6$ همچنین می توان ارزشهای منفی به صورت ۱-،۲-، ۴ ، ۸ را به کد دهدهی تخصیص داد . در این حالت ترکیب ۰۱۱۰ ، عدد ۲ تفسیر می شود و بطریق زیر محاسبه می گردد :

$$0\times8+1\times4+1\times(-2)+0\times(-1)=2$$

دو کد وزین دیگر که در جدول نشان داده شده اند ، ۲۴۲۱ و ۵۰۴۳۲۱۰ هستند که دهدهی که در کامپیوتر های قدیمی به کار می رفته کد افزونی ۳- بوده است . این یک کد غیر وزین است ، و از جمع عدد ۳ با مقدار BCD آن به دست می آید .

جدول (۲-۱) کدهای دودویی برای ارقام دهدهی

رقم دهدهی	(BCD) ۸۴۲۱	افزونی ۳-	۸۴-۲-۱	۲۴۲۱	دوپنجی ۵۰۴۳۲۱۰
۰	۰۰۰۰	۰۰۱۱	۰۰۰۰	۰۰۰۰	۰۱۰۰۰۰۱
۱	۰۰۰۱	۰۱۰۰	۰۱۱۱	۰۰۰۱	۰۱۰۰۰۱۰
۲	۰۰۱۰	۰۱۰۱	۰۱۱۰	۰۰۱۰	۰۱۰۰۱۰۰
۳	۰۰۱۱	۰۱۱۰	۰۱۰۱	۰۰۱۱	۰۱۰۱۰۰۰
۴	۰۱۰۰	۰۱۱۱	۰۱۰۰	۰۱۰۰	۰۱۱۰۰۰۰
۵	۰۱۰۱	۱۰۰۰	۱۰۱۱	۱۰۱۱	۱۰۰۰۰۰۱
۶	۰۱۱۰	۱۰۰۱	۱۰۱۰	۱۱۰۰	۱۰۰۰۰۱۰
۷	۰۱۱۱	۱۰۱۰	۱۰۰۱	۱۱۰۱	۱۰۰۰۱۰۰
۸	۱۰۰۰	۱۰۱۱	۱۰۰۰	۱۱۱۰	۱۰۰۱۰۰۰
۹	۱۰۰۱	۱۱۰۰	۱۱۱۱	۱۱۱۱	۱۰۱۰۰۰۰

اعداد در کامپیوتر دیجیتال به صورت دودویی و یا به صورت دهدهی توسط یک کد دودویی نمایش داده می شوند . مثلاً وقتی که عدد ۳۹۲ به دودویی تبدیل می شود عدد ۱۱۰۰۰۱۰۱۱ به دست می آید که شامل ۹ رقم دودویی است . همان عدد وقتی به فرم BCD نمایش داده می شود برای هر رقم دهدهی چهار بیت اشغال می گردد که جمعاً دوازد بیت خواهد شد ، یعنی ۰۰۱۱۱۰۰۱۰۱۰۱ .

درک اختلاف تبدیل یک عدد دهدهی به دودویی و کد گذاری دودویی همان عدد دهدهی امر مهمی است . در هر حالت نتیجه نهایی مجموعه ای از بیتها است . کد BCD به عنوان کدی که به دو صورت مورد استفاده قرار می گیرد ، انتخاب شده است . مادامی که عدد بین ۰ الی ۹ باشد اطلاعاتی دودویی ، نتیجه تبدیل مستقیم اعداد فوق به صورت دودویی است ولی اگر عدد بیش از ۹ باشد دیگر این تبدیل

مفهومی ندارد و در این صورت تبدیل و کد گذاری با یکدیگر اختلاف دارند . این مفهوم آنقدر اهمیت دارد که تکرار یک مثال دیگر در مورد آن ارزشمند است . معادل عدد دهدهی ۱۳ به دودویی عدد ۱۱۰۱ است و کد آن در BCD ، ۰۰۰۱۰۰۱۱ می باشد .

از میان پنج کد فهرست شده در جدول (۲-۱) به نظر می رسد که BCD طبیعی ترین کد برای استفاده بوده و در حقیقت معمولیترین آنهاست . کدهای دیگر چهار بیتی یک مشخصه مشترک دارند که در BCD یافت نمی شود . کد افزونی -۳ و ۲،۲،۴،۱ و کد ۱- ، ۲- ، ۴ ، ۸ کدهای خود مکمل هستند ، به این مفهوم که مکمل ۹ عدد دهدهی به سادگی با تبدیل ۰ها به ۱ها و ۱ ها به ۰ ها بدست می آید . مثلاً عدد ۳۹۵ در مد ۱،۲،۴،۲ به شکل ۰۰۱۱۱۱۱۱۱۰۱۱ است . مکمل ۹ این عدد یعنی ۶۰۴ با ۱۱۰۰۰۰۰۰۰۱۰۰ نمایش داده می شودکه به سادگی از جایگزینی ۱ ها با ۰ ها و ۰ ها با ۱ ها به دست می آید . این خاصیت زمانی که اعمال محاسباتی کامپیوتر با اعداد دهدهی (در کد دودویی) صورت می گیرد و عمل تفریق با استفاده از مکمل ۹ انجام می شود ، سودمند است .

کد دو پنجی که در جدول (۲-۱) نشان داده شده است مثالی از یک کد هفت بیتی با خاصیت آشکار سازی خطا است . هر رقم دهدهی ، شامل پنج ۰ و دو ۱ ، که در ستونهای وزین مربوطه جای گرفته اند می باشد . خاصیت آشکار سازی خطای این کد زمانی قابل درک است که بدانیم سیستمهای دیجیتال ۱ و ۰ دودویی را با دو سطح ولتاژ یا جریان مستقل از هم نشان می دهند . در طول انتقال این سطح ولتاژ یا سیگنالها ، از یک محل به محل دیگر ، خطایی ممکن است اتفاق افتد و یک یا چند بیت احتمالاً تغییر ارزش بدهد . یک کدار در مقصد قادر است وجود دو و ۱ یا کمتر در

کد دو پنجی را آشکار کند . اگر ترکیب بیتهای رسیده با ترکیب مجاز در کد یکسان نباشد ، یک خطا محسوب شده و اطلاع داده می شود .

کد های آشکار سازی خطا

اطلاعات دودویی ممکن است از یک مکان به مکان دیگر بکمک وسایل ارتباطی مثل سیمها یا موجهای رادیویی انتقال یابند . هر پارازیت خارجی که وارد وسایل فیزیکی شود ارزش بیتها را از ۰ به ۱ و یا برعکس تغییر می دهد . معمول ترین روش خطایابی ، استفاده از بیت توازن است . یک بیت توازن ، بیتی است اضافی که جزئی از پیام است سبب می شود که تعداد کل ۱ ها در پیان زوج یا فرد گردد یک پیغام چهار بیتی به همراه بیت توازن P در جدول (۳-۱) نشان داده شده است . اگر بیت توازن فرد انتخاب شده باشد P طوری انتخاب می گردد که مجموع ۱ها در پنج بیت فرد باشد و در توازن زوج P طوری انتخاب شده تا مجموع همه ۱ ها زوج باشد .

جدول (۳-۱) بیت توازن

پیام (a)	P (فرد)	پیام (b)	P (زوج)
۰۰۰۰	۱	۰۰۰۰	۰
۰۰۰۱	۰	۰۰۰۱	۱
۰۰۱۰	۰	۰۰۱۰	۱
۰۰۱۱	۱	۰۰۱۱	۰
۰۱۰۰	۰	۰۱۰۰	۱
۰۱۰۱	۱	۰۱۰۱	۰
۰۱۱۰	۱	۰۱۱۰	۰
۰۱۱۱	۰	۰۱۱۱	۱
۱۰۰۰	۰	۱۰۰۰	۱
۱۰۰۱	۱	۱۰۰۱	۰
۱۰۱۰	۱	۱۰۱۰	۰
۱۰۱۱	۰	۱۰۱۱	۱
۱۱۰۰	۱	۱۱۰۰	۰
۱۱۰۱	۰	۱۱۰۱	۱
۱۱۱۰	۰	۱۱۱۰	۱
۱۱۱۱	۱	۱۱۱۱	۰

نحوه خطایابی بدون شرح است . یک بیت توازن زوج در مبدا برای هر پیام تولید می شود . بیت توازن همراه با پیام به سمت مقصد ارسال می شود . توزان در مقصد چک می گردد . زوج نبودن داده رسیده به معنی این است که حداقل یک بیت در ضمن انتقال تعویض شده است . این روش قادر است هر ترکیب فردی از تعداد خطا مانند تغییر یک ، سه و ... بیت را در هر پیام انتقال یافته مشخص نماید . روش های تشخیص خطای اضافی دیگری برای یافتن خطاهای زوج لازم است .

کد گری (انعکاسی)

سیستمهای دیجیتال فقط برای پردازش داده های گسسته طراحی می شوند . بسیاری از دستگاههای فیزیکی داده خروجی پیوسته تولید می کنند .. اطلاعات پیوسته یا آنالوگ بوسیله مبدل آنالوگ به دیجیتال به فرم دیجیتال تبدیل می شوند . گاهی اوقات استفاده از کد گری نشان داده شده در جدول (۴-۱) ، جهت نمایش داده های دیجیتال تبدیل شده از داده های آنالوگ معمولتر است .

مزیت کد گری نسبت به اعداد دودویی محض این است که وقتی از یک عدد به عدد بعدی می رویم فقط یک مزیت بیت تغییر می کند . مثلاً در رفتن از ۷ به ۸ ، کد گری از ۰۱۰۰ به ۱۱۰۰ تغییر می یابد . دیده می شود که فقط سمت چپ ترین بیت از ۰ به ۱ تغییر یافته و سه بیت بقیه یکسانند . وقتی مطلب را با اعداد دودویی مقایسه کنیم ، تغییر از ۷ به ۸ سبب تغییر هر چهار بیت ، یعنی از ۰۱۱۱ به ۱۰۰۰ می گردد .

کد گری در کاربردهایی که رشته معمولی اعداد دودویی امکان تولید خطا دارند بکار می رود . بهنگام تغییر از ۰۱۱۱ به ۱۰۰۰ ، اگر تغییر سمت راست ترین بیت از سه بیت دیگر بیشتر طول بکشد یک عدد میانه ای مانند ۱۰۰۱ تولید می شود . کد گری

این مشکل را حذف می نماید زیرا بهنگام انتقال بین دو عدد فقط یک تغیر رخ می دهد .

نمونه ای از کاربرد کد گری هنگامی است که داده آنالوگ بوسیله تغییر پیوسته شفت نمایش داده می شود . دور شفت به قطعاتی تقسیم شده ، و به هر قطعه عددی تخصیص یافته است . اگر قطعات مجاور بوسیله کد گری مرتبط شوند ، ابهام در تفکیک دو ناحیه مجاور که در حال احساس شدن است کاهش می یابد .

جدول (۴-۱) کد گری ۴ بیتی

معادل دهدهی	کد گری
۰	۰۰۰۰
۱	۰۰۰۱
۲	۰۰۱۱
۳	۰۰۱۰
۴	۰۱۱۰
۵	۰۱۱۱
۶	۰۱۰۱
۷	۰۱۰۰
۸	۱۱۰۰
۹	۱۱۰۱
۱۰	۱۱۱۱
۱۱	۱۱۱۰
۱۲	۱۰۱۰
۱۳	۱۰۱۱
۱۴	۱۰۰۱
۱۵	۱۰۰۰

کد های ASCII

در بسیاری از کاربردهای کامپیوتر های دیجیتال نه تنها نیاز به دستکاری روی داده های عددی بلکه روی حروف نیز می باشد . یک کاراکتر الفبا عددی عبارت از یک کد دودویی مربوط به عنصری از یک مجموعه که شامل ۱۰ رقم دهدهی ، ۲۶ حروف الفبا و تعداد معینی از علائم مخصوص است . چنین مجموعه ای بین ۳۶ تا ۶۴ عنصر برای

حروف بزرگ و یا بین ۶۴ تا ۱۲۸ عنصر با حروف بالا و پایین هر کلید دارد . در حالت اول به شش بیت و در حالت دوم به هفت بیت نیاز است .

کد دودویی استاندارد برای کاراکتر های الفبا عددی ASCII است . این کد از هفت بیت برای کد نمودن ۱۲۸ کاراکتر استفاده می کند . هفت بیت با b_1 تا b_7 مشخص شده اند که b_7 با ارزشترین بیت را تشکیل می دهد . مثلاً ، حرف A در ASCII بصورت ۱۰۰۰۰۰۱ (ستون ۱۰۰ سطر ۰۰۰۱) می باشد . کد ASCII دارای ۹۴ کد شامل ۲۶ کاراکتر مربوطه به حروف بزرگ (A تا Z) ، ۲۶ کاراکتر حروف کوچک (a تا z) ، ۱۰ عدد (۰ تا ۹) و ۳۲ کاراکتر مخصوص چاپ نشدنی مانند % ، * و $ است .

کد همینگ

جهت تشخیص و تصحیح خطا بکار می رود. اگر M پیام ارسالی m بیتی باشد.

$M: n_1 n_2 n_3 n_4$

k تعداد بیتهای توازن که اضافه می شود و از رابطه زیر تبعیت می کند. $k+m \le 2^k - 1$

بیتهای توازن درمحلهای 2^n $(2^0\ 2^1\ 2^2 \ldots)$ قرار می گیرد . $p_1 p_2 m_3 p_4 m_5 m_6 m_7$

بیتهای توازن بدینصورت بدست می آیند:

$$P_1 = m_3 \oplus m_5 \oplus m_7$$
$$P_2 = m_3 \oplus m_6 \oplus m_7$$
$$P_4 = m_5 \oplus m_6 \oplus m_7$$

$$m_3 \to 0\ \ 1\ \ 1$$
$$m_5 \to 1\ \ 0\ \ 1$$
$$m_6 \to 1\ \ 1\ \ 0$$
$$m_7 \to 0\ \ 1\ \ 1$$

محدوده بیت های پیام	تعداد بیت های توزان k
2-4	3
5-11	4
12-26	5
27-57	6

$M: 1011 \qquad \Rightarrow p_1 p_2 1 p_4 0\ 1\ 1$

$P_1 = m_3 \oplus m_5 \oplus m_7 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$

$P_2 = m_3 \oplus m_6 \oplus m_7 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$

$P_4 = m_5 \oplus m_6 \oplus m_7 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$

تشخیص خطا:

کد خطایی از روی اطلاعات دریافتی ایجاد می شود.

$C: C_4 C_2 C_1$

$C_1 = P_1 \oplus m_3 \oplus m_5 \oplus m_7$

$C_2 = P_2 \oplus m_3 \oplus m_6 \oplus m_7$

$C_4 = P_4 \oplus m_5 \oplus m_6 \oplus m_7$

اگر C=0 خطایی رخ نداده است اگر $C \neq 0$ خطا رخ داده و مقداری c مکان خطا خواهد بود .

$0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \rightarrow 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1$

$C_1 = 0$

$C_2 = 1 \quad \Rightarrow C = 0\ 1\ 0 = 2$

$C_3 = 0$

تشخیص و تصحیح یك خطا

$m = 5 \qquad k = 4$

$p_1\ p_2\ m_3\ p_4\ m_5\ m_6\ m_7\ p_8\ m_9$

$C_1 = P_1 \oplus m_3 \oplus m_5 \oplus m_7 \oplus m_9$

$C_2 = P_2 \oplus m_3 \oplus m_6 \oplus m_7$

$C_4 = P_4 \oplus m_5 \oplus m_6 \oplus m_7$

$C_8 = m_9$

تعریف minimum distance

حداقل فاصله عبارتست از حداقل تعداد بیت هایی که باید در یک کد تغییر یابد تا کد مجاز دیگری از همان سیستم کد گذاری به دست آید .

M . D. کد گری = ۱

M . D. 2421 کد = ۱

در صورتیکه MD = 3 باشد و یک بیت دچار خطا شود هم قادر به تشخیص خطا و هم توانایی تصحیح آن را داریم .

$$M = C + d + 1$$

d : تعداد بیت هاي خطاي قابل تشخیص

c : تعداد بیت هاي خطاي قابل تصحیح

به کد همینگ بیت توازن دیگری اضافه می کند که با تمام بیتهای توزان زوج برقراری می کند .

M	d	c
1	0	0
2	1	0
3	2	0
	1	1
4	3	0
	2	1
	4	0
5	3	1
	2	2

$$P_1\, p_2\, m_3\, p_4\, m_5\, m_6\, m_7\, p_8\, m_9 \,،\, p_0$$

در مقصد که $C: C_8 C_4 C_2 C_1$ و توزان دیگری با نام p را ایجاد می کنند .

$$P = P_1 \oplus p_2 \oplus \dots m_9 \oplus p_0$$

خطایی رخ نداده است $C = 0 \quad , \quad P = 0$

یک خطا رخ داده و قابل تصحیح $C \neq 0 \quad , \quad P = 1$

دو خطا رخ داده و فقط قابل تشخیص $C \neq 0 \quad , \quad P = 0$

خود P دچار خطا شده است $C = 0 \quad , \quad P = 1$